分散アルゴリズム輪講配布資料
5 章 Deadlock-free Packet Switching

速水 雄太

2002 年 4 月 26 日

5.2.1 Buffer Graphs

定義 $b \in \mathcal{B}$ のバッファクラスとは、 BG において b で終るパスのなかで最も長いパスの長さである。

系 $nb(p,b)$のバッファクラス $\geq$ (bのバッファクラス)

定理 5.7 コントローラー $\mathbf{bgc}_{BG}$ は deadlock-free である。

証明

バッファクラス r に関する帰納法で証明する。注意として、コントローラー $\mathbf{bgc}_{BG}$ は全てのパケットを (guaranteed path 上の) 適切なバッファに転送するので、初期状態から到達可能な configuration では全てのパケットが適切なバッファに存在している。まず R をバッファクラスで最大のものとする。

$r = R$ の場合 バッファクラスが R であるようなバッファ b は BG では outgoing edge を持たない。結局、 b に転送されるパケット p は b の属するノード u が終点であるからに他ならず、 p は u で消費される。ゆえにバッファクラス R のバッファには deadlock-packet は存在しない。

$r < R$ の場合 $r < r' \leq R$ なる r' について、バッファクラスが r' であるバッファには deadlock-packet が存在しないことを仮定し、さらに、バッファクラスが r のバッファについても deadlock-packet が存在しないことを示す。

γ を、バッファクラスが r のバッファ b にパケット p が存在するような、到達可能な configuration とする。もし p の destination が b の属するノード u であったなら、 p は u で消費されるので p は deadlock しない。もし、 p がバッファ $c = nb(p,b)$ に転送される場合でも、 c のバッファクラスは b のクラスより大きいので、帰納法の仮定から c は deadlock パケットを含まない。ゆえに γ から到達可能で、なおかつ c が空の configuration δ が存在する。 δ のもとでは c に p を転送して configuration δ' に遷移することが可能であり、帰納法の仮定から p は δ' では deadlock しない。結局、 p は γ では deadlock しない。 (証明終り)

5.3.1 forward-count and Backward-count Controllers

定理 5.17 もし $B > k$ ならコントローラー **FC** は deadlock-free である。

証明

背理法により証明する。γ を到達可能な deadlock configuration とする。γ にパケットの「生成」以外の操作「転送」と「消費」を最大限に適用することにより、「生成」以外の操作が適用できない configuration δ を得る。γ は deadlock configuration なので δ には最低限 1 個の deadlock packet が含まれており、その中で最も s_p の値が最も小さいパケット p をとってくる。p の留まっているノードを u とすると、u は destination ではないので p は u の隣接ノードの一つ w に転送されなければならない。しかし、w に転送できないのは **FC** が許可しないからであり、ゆえに、

$$s_p - 1 \geq f_w \tag{1}$$

(1) と $s_p \leq k$、$k < B$ より、

$$f_w < B \tag{2}$$

(2) は δ のもとで少なくとも 1 個は w にパケットが存在していることを示している。そこで最も新しく w に転送されたパケットを q、q が w に転送される直前の w の空きバッファ数を f'_w とおく。すると、q が w に転送されてから δ に至るまで、新たに w に転送されたパケットはないので f_w と f'_w の間には次のような関係式が成り立つ。

$$f'_w - 1 \leq f_w \tag{3}$$

一方、q が w に転送されたことは

$$s_q < f'_w \tag{4}$$

を意味している。以上、(1)、(3)、(4) より、

$$s_q < f'_w \leq f_w + 1 \leq s_p \tag{5}$$

(5) は s_p が最小であるような p の選び方に矛盾する。(証明終り)